Inversion locale : Laudenbach p65

Théorème : Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $F = \mathbb{R}^p$, U un ouvert de E et $a \in U$. Soit $f : U \to F$, $\mathcal{C}^1$ telle que $D_a f$ soit inversible.
Alors, $\exists U'$ voisinnage de a dans U, $\exists V'$ voisinnage de $f(a)$ dans F telle que $f : U' \to V'$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Preuve : Par translation on peut considérer que $a = 0_E$ et quitte à considérer $g(x) = [D_a f]^{-1} \circ (f(a+x) - f(x))$, on a $f(a) = 0_F$ et $D_0 f = Id$. Ainsi $E = F$ donc $n = p$.

On pose alors $\varphi(x) = f(x) - x$ et $T_y(x) = y - \varphi(x) = (y - f(x)) + x$
Ainsi, x est solution de $f(x) = y \Leftrightarrow x$ est point fixe de T_y

---

Lemme : $\exists r > 0$, $B(0,r)$ possède les propriétés suivantes :
i) $\overline{B} \subset U$ ii) $\forall x \in B$, $\|D_x \varphi\| \leq \frac{1}{2}$ iii) $\forall x \in B$ $D_x f \in GL(E)$

Preuve :
i) Comme U est ouvert, $\exists \rho > 0$, $B(0,\rho) \subset U$ alors $r < \rho$ convient.
ii) Comme $\varphi \in \mathcal{C}^1$ et $D_0 \varphi = 0$, par continuité de $x \mapsto D_x \varphi$ (car f est $\mathcal{C}^1$) en 0, on a :
$\exists r > 0$, tel que $\|x\| \leq r \Rightarrow \|D_x \varphi\| \leq \frac{1}{2}$
iii) Comme $x \mapsto D_x f \in \mathcal{C}^0$ et comme $D_0 f \in GL(E)$ qui est ouvert dans $\mathcal{L}(E)$ alors $\exists r$ assez petit tel que $D_x f \in GL(E)$ $\forall x \in B$.

On a alors par inégalité des accroissements finis : $\forall (x_1, x_2) \in B$, $\|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_2\|$

En particulier, $\|x\| \leq r \Rightarrow \begin{cases} \|\varphi(x)\| \leq \frac{r}{2} \\ \|T_y(x)\| \leq \|y\| + \frac{r}{2} \end{cases}$

Donc si $\|y\| < \frac{r}{2}$, T_y envoit $\overline{B}$ sur B avec une constante de Lipschitz $k \leq \frac{1}{2}$.
Donc comme $\overline{B}$ est fermé dans un complet, $\overline{B}$ est complet. Par le Théorème du point fixe à paramètre, T_y a un unique point fixe $g(y)$ dans $\overline{B}$ mais en fait $T_y(\overline{B}) \subset B$ et de plus, $y \mapsto g(y)$ continue.

Soit $V' = \{y \in E \mid \|y\| < \frac{r}{2}\}$ et $U' = B \cap f^{-1}(V')$

Ainsi, pour $y \in V'$, $g(y)$ est l'unique préimage de y dans B. Donc $f: U' \to V'$ est une bijection dont l'inverse est g. Comme g est continue, f est un homéomorphisme.

Montrons que pour tout points de V', g est différentiable :

Soit $(x_0, x_1) \in U'$ et $(y_0, y_1) \in V'$ tel que $f(x_0) = y_0$ et $f(x_1) = y_1$

Comme f est différentiable, on a $f(x_1) = f(x_0) + D_{x_0}f(x_1 - x_0) + o(\|x_1 - x_0\|)$

En composant par $D_{x_0}f^{-1}$ on a : $D_{x_0}f^{-1}(y_1 - y_0) - D_{x_0}f^{-1}(o(\|x_1 - x_0\|)) = x_1 - x_0$ (1)

Montrons que $D_{x_0}f^{-1}(o(\|x_1 - x_0\|)) = o(\|y_1 - y_0\|)$:

Comme $(D_{x_0}f)^{-1}$ est continue, $\exists \delta > 0$, $\|x_1 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|D_{x_0}f^{-1}(o(\|x_1 - x_0\|))\| \leq \frac{1}{2}\|x_1 - x_0\|$

On a $\|D_{x_0}f^{-1}(o(\|x_1 - x_0\|))\| \leq \|\|D_{x_0}f^{-1}\|\| \times \|o(\|x_1 - x_0\|)\|$ car $\frac{|o(\|x_1 - x_0\|)|}{\|x_1 - x_0\|} \xrightarrow[x_1 \to x_0]{} 0 \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tq $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$
$\Rightarrow \|o(\|x_1 - x_0\|)\| \leq \varepsilon \|x_1 - x_0\|$
et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2\|\|D_{x_0}f^{-1}\|\|}$

En injectant dans (1) : $\|x_1 - x_0\| < \delta \Rightarrow \|x_1 - x_0\| \leq \|\|D_{x_0}f^{-1}\|\| \times \|y_1 - y_0\| + \frac{1}{2}\|x_1 - x_0\|$

D'où $\|x_1 - x_0\| \leq C\|y_1 - y_0\|$ où $C = 2\|\|D_{x_0}f^{-1}\|\|$

Comme g est continue, si $\|y_1 - y_0\|$ assez petit alors $\|x_1 - x_0\| \leq \delta$, on a alors :

$$\frac{\|o(\|x_1 - x_0\|)\|}{\|y_1 - y_0\|} \leq C \frac{\|o(\|x_1 - x_0\|)\|}{\|x_1 - x_0\|}$$

Donc quand $y_1 \to y_0$, $x_1 = g(y_1) \to x_0$ donc $o(\|x_1 - x_0\|) = o(\|y_1 - y_0\|)$

Donc dans (1), $x_1 - x_0 = (D_{x_0}f)^{-1}(y_1 - y_0) + o(\|y_1 - y_0\|)$ donc g est différentiable en y_0 et sa dérivée est $D_{x_0}f^{-1}$